Herzlich Willkommen zur
„Einführung in die Dynamischen Systeme"

(1.1) Ausgangspunkt und Motivation

Gegeben. • Meist ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, seltener eine differenzb. Mannigfaltigkeit (z.B. eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$: M)

• ein Vektorfeld $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (bzw. $f: M \longrightarrow TM$, dem Tangentialbündel $TM = \bigcup_{p \in M} TM_p$, $f(p) \in TM_p$) der Diff.-stufe $r \geq 1$, wobei $r = \infty$ und $r = \omega$ (d.h. f ist reell-analytisch).

Betrachtet: ... wird dann die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung (ODE)

$$(*) \qquad \dot{x} = f(x)$$

auf D bzw. das Anfangswertproblem

$$(\mathrm{AWP}) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

mit einem $x_0 \in D$.

Erinnere (z.B. aus „Analysis-IV" = „Einf. i. d. Fkt. und Gew. Dgl.") im SS 2021):

Es existiert ein Intervall

$$I(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0))$$

$$t_-(x_0) \in [-\infty, 0), \; t_+(x_0) \in (0, \infty],$$

mit $0 \in I(x_0)$ und eine Lösungskurve $\alpha : I(x_0) \longrightarrow D$ von (*) mit $\alpha(0) = x_0$, d.h.

$$\dot{\alpha}(t) = f(\alpha(t)), \quad \forall t \in I(x_0).$$

Das $(I(x_0), \alpha)$ ist dabei maximal und eindeutig bestimmt.

(1.2) Das zugehörige dynamische System: Der Buchstabe x wird traditionell überlastet:

- Er beschreibt die unabhängige Variable $x \in D$;
- Er beschreibt die (max.) Lös.-Kurve

$$x : I(x) \longrightarrow D$$

von $\dot{x} = f(x)$ mit Anf.-wert x $(x(0) = x)$

Setzt man

$$\Omega := \bigcup_{x \in D} I(x) \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times D$$

und

$$\varphi : \Omega \longrightarrow D, \quad (t, x) \longmapsto \varphi^t(x) = x(t),$$

so nennt man φ das zu f gehörende dynamische System. Es gilt dann (siehe Anal. IV):

(i) $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times D$ ist offen

(ii) $\{0\} \times D \subseteq \Omega$ und

$$I(x) = \{ t \in \mathbb{R} : (t, x) \in \Omega \}$$

ist ein offenes Intervall, für alle $x \in D$;

(iii) φ ist eine C^r-Abbildung (φ hängt also C^r-mäßig vom Anfangswert ab), und in t-Richtung sogar C^{r+1}.

(iv) Es gilt die so genannte Fluss-Gleichung: Für alle $x \in D$ und $t \in I(x)$ gilt: $s \in I(\varphi^t(x)) \iff s+t \in I(x)$ und für diese s ist dann:

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x)$$

(v) Das Paar (Ω, φ) mit diesen Eigenschaften ist maximal.

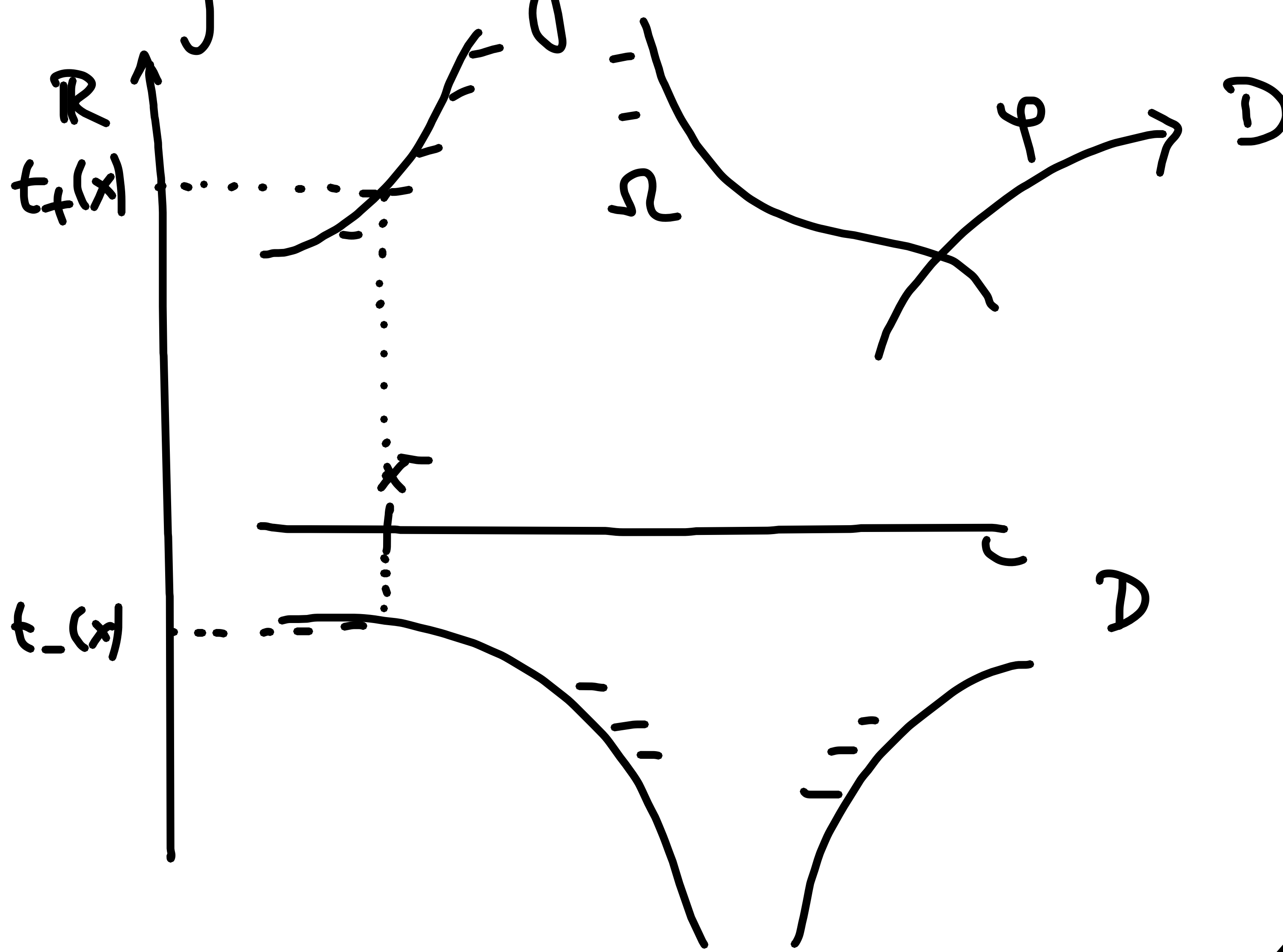
Umgekehrt könnte man mit Paaren (Ω, φ) mit den Eigenschaften (i) – (v) starten und dies ein <u>dynamisches System auf D</u> nennen.

Setzt man dann zu φ <u>das zugehörige Vektorfeld</u> $f: D \to \mathbb{R}^n$ durch

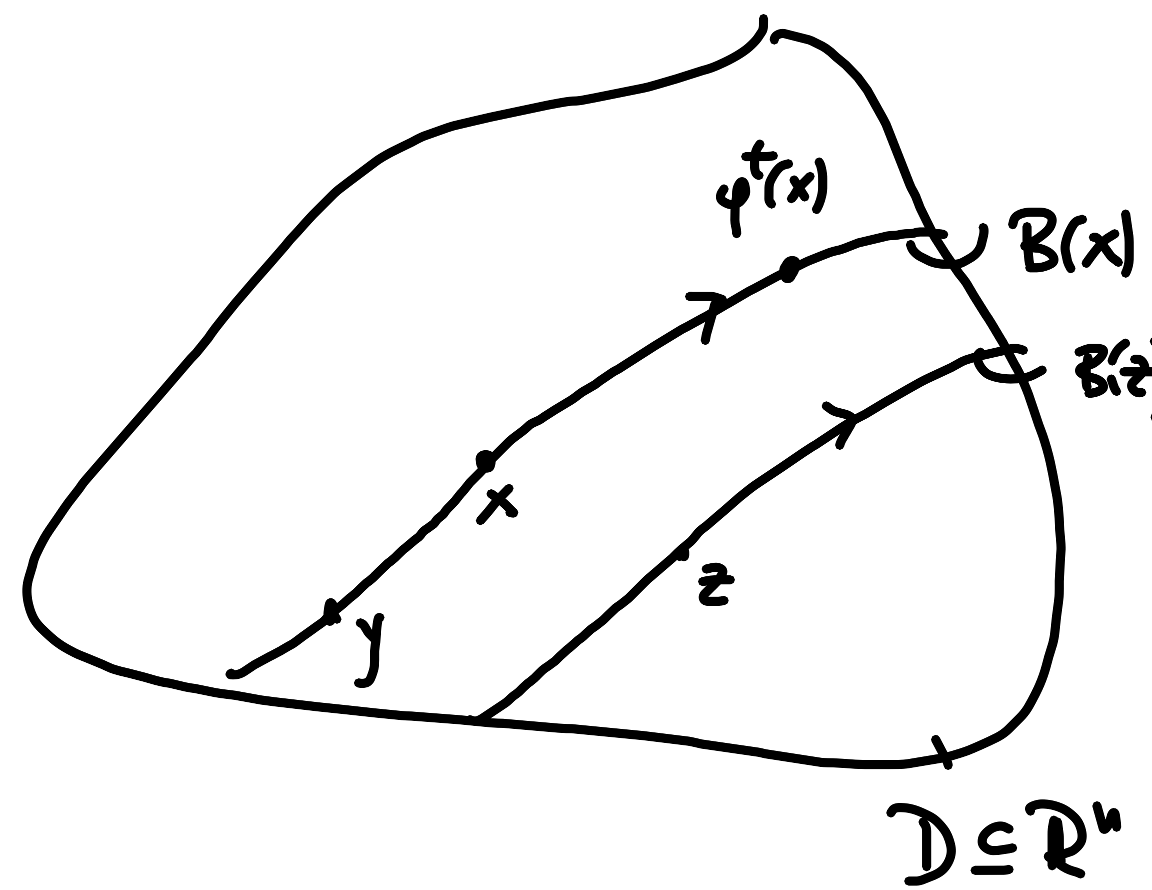
$$f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^t(x) ,$$

so erhält man eine 1:1 – Beziehung zwischen C^r – Vektorfeldern und dynamischen Systemen der Diff.-barkeitsstufe r auf D.

Das dynamische System:



Der Phasenraum:



Der ganze Phasenraum $D \subseteq \mathbb{R}^n$ wird dadurch in Bahnen

$$B(x) = \{ \varphi^t(x) \in D : t \in I(x) \} \subseteq D$$

zerlegt, wobei entweder $B(x) = B(y)$ ist (im Falle $y = \varphi^t(x)$, für ein $t \in I(x)$) oder

$$B(x) \cap B(y) = \emptyset .$$

(1.3) Gefragt wird nun nicht nach analytischen Ausdrücken für φ, was i.a. auch gar nicht möglich ist. (Selbst wenn f eine elementare Funktion wie etwa ein Polynom ist, kann die Lösung von $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ eine Funktion sein, die nicht durch elementare Funktionen ausdrückbar ist. Beispiel:

(i) $\dot{x} = x$ auf $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\varphi^t(x) = x e^t$

(ii) $\dot{x} = 1 + x^2$ auf $\mathbb{R}$, $x(t) = \tan t$, $x(0) = 0$

Vielmehr wird nach dem qualitativen Verhalten von φ gefragt, z. B.:

(a) Für welche $x \in D$ ist $t_-(x) > -\infty$, $t_+(x) < \infty$?

(b) Ist die Lösung $x : I(x) \to D$ eine Gleichgewichtslage, d.h.: $I(x) = \mathbb{R}$ und $x(t) = x$, $\forall t \in \mathbb{R}$?

(c) Ist $x : I(x) \to D$ eine periodische Lösung, d.h. $I(x) = \mathbb{R}$ und es gibt ein $T > 0$ mit

$$x(t+T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(Das kleinste solche $T > 0$ heißt dann Periode von x.)

(d) Falls $x \in D$ mit $t_+(x) = \infty$. Was kann über $x(t)$ für $t \to \infty$ aussagen? Nähert sich $x(t)$ einem Punkt $a \in D$? (Dann wäre a eine Gl-lage.) Nähert sich $x(t)$ einer periodischen Bahn?

(e) Ist eine vorgelegte Gl.-lage a stabil? (D.h.: unpräzise: Stört man a nur leicht, so bleibt die Bahn in der Nähe von a.)

(f) Ist das ganze System (struktur-) stabil, d.h.: Ändert sich das qualitative Verhalten nicht (oder nur kaum), wenn man $f \in C^r(D; \mathbb{R}^n)$ nur leicht stört?

Pioniere: H. Poincaré, Birkhoff, Liapunov.

(1.4) Der zugehörige Fluss. Setzt man für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$D_t := \{x \in D : t \in I(x)\} \subseteq D,$$

so ist $D_t \subseteq D$ offen, $\forall t \in \mathbb{R}$, $D_0 = D$ und $\varphi^t(D_t) = D_{-t}$ und

$$\varphi^t : D_t \longrightarrow D_{-t}$$

ist ein Diffeomorphismus (weil offenbar $\varphi^0 = id_D$ und $\varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t}$ ist, da, wo beide Seiten definiert sind, insbesondere

$$\varphi^t \circ \varphi^{-t} = \varphi^0|_{D_{-t}} = id_{D_{-t}}, \quad \varphi^{-t} \circ \varphi^t = \varphi^0|_{D_t} = id_{D_t})$$

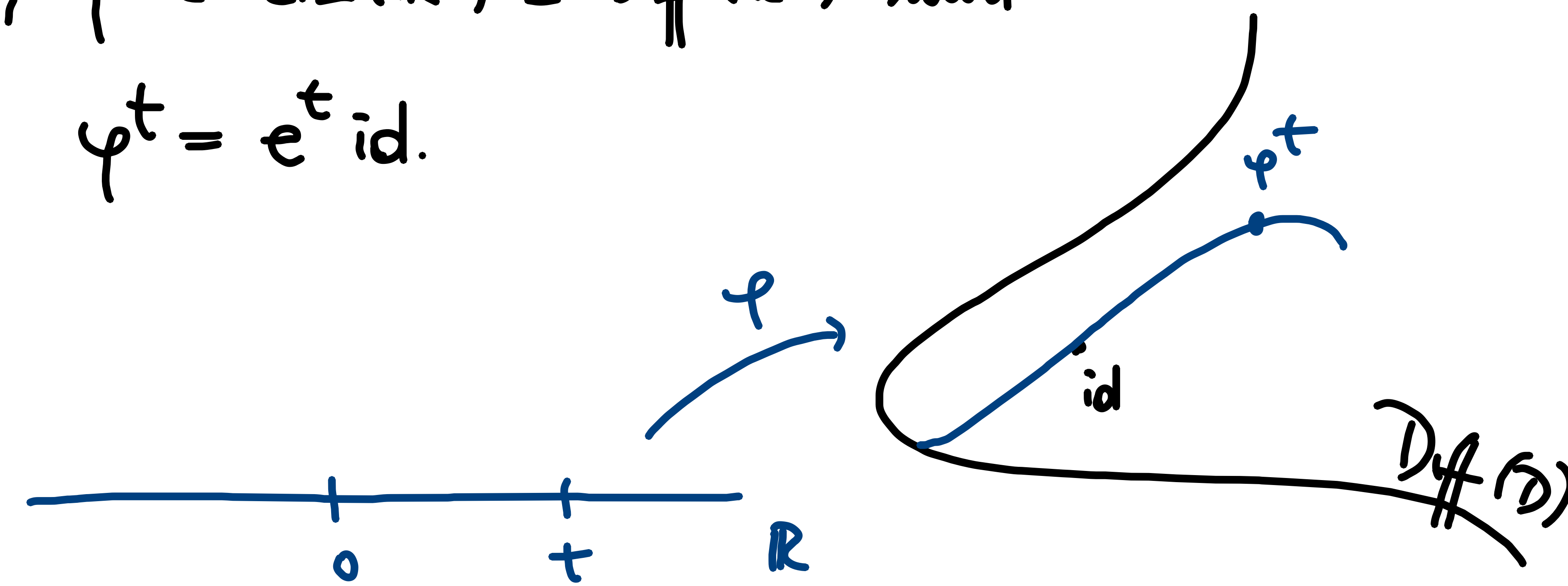
mit $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$. Die Familie von Diffeomorphismen $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ wird auch als zugehöriger Fluss von f (bzw. φ)

(oder etwas altmodisch: als Strömung) bezeichnet.
Im Fall, dass $I(x)=\mathbb{R}$ ist, für alle $x\in D$, also $\Omega=\mathbb{R}\times D$, ist also $D_t=D$, $\forall t\in\mathbb{R}$, und

$$\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{Diff}(D),\quad t\longmapsto \varphi^t$$

ein Gruppenhomomorphismus. Der Fluss wird dann als global bezeichnet. Im Falle von $f=\mathrm{id}\in C^r(D,\mathbb{R}^n)$ z.B. ist der Fluss global, $\varphi^t\in GL(\mathbb{R}^n)\subseteq \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\varphi^t=e^t\,\mathrm{id}.$$



(1.5) *Definition*. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ $(m \in \mathbb{N})$ Gebiet (mit Koordinaten $(q,p) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}$). Ein *Hamilton-System auf D* ist gegeben durch eine Funktion $H \in \mathcal{C}^{r+1}(D)$ $(r \geq 1)$ und dem System

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot{q} &= D_p H(q,p) \\ \dot{p} &= -D_q H(q,p) \end{aligned}$$

(1.6) *Kommentar*. (a) Man nennt dann H die *Hamilton-Funktion* des Systems.

(b) Setzt man

$$I := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2m}(\mathbb{R})$$

und $x := (q,p)$, so kann $(*)$ zu

$$\begin{pmatrix}\dot q\\ \dot p\end{pmatrix} = \Big) \qquad \dot x = I \cdot DH(x) \qquad \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_qH\\ D_pH\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}D_pH\\ -D_qH\end{pmatrix}$$

zusammenfassen, ist also von unserem Typ.

(1.7) Die Newtonsche Differentialgleichung. Ein mechanisches System auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ mit einer zeitabhängigen Kraft wird beschrieben durch eine C^r-Abbildung

$$F : \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \; (t, x, y) \longmapsto F(t, x, y)$$

und der zugehörigen Newtonschen Diff.-glg.

$$(*) \qquad m \cdot \ddot x = F(t, x, \dot x)$$

Mit der (maximalen) Lösung $x : I \to D$ zum Anf.-wert

$(x_0, y_0) \in G \times \mathbb{R}^n$ wird hier die Bewegung eines (punktförmigen) Teilchens der Masse $m > 0$ (die so genannte „träge Masse") beschrieben, welches man der Kraft F aussetzt.

Auch das passt in unser Schema. Wir setzen

$$D := \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$$

und

$$f : D \to \mathbb{R}^{2n+1}, \qquad f(s,x,y) = \left(1, y, \frac{1}{m} F(s,x,y)\right).$$

Dann wird mit $z := (s,x,y)$ das System $\dot{z} = f(z)$ zu

$$\begin{aligned} \dot{s} &= 1 \\ \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \frac{1}{m} F(s,x,y) \end{aligned}$$

Ist dann $\beta : I(0,x,y) \longrightarrow D$ die maximale Lösung zum Anf.-wert $(x,y) \in G \times \mathbb{R}^n$, so ist

$$\beta(t) = (t, \alpha(t), \dot{\alpha}(t))$$

mit einer Kurve $\alpha : I \to G$, die gerade (*) löst.